Taki Academy
www.takiacademy.com

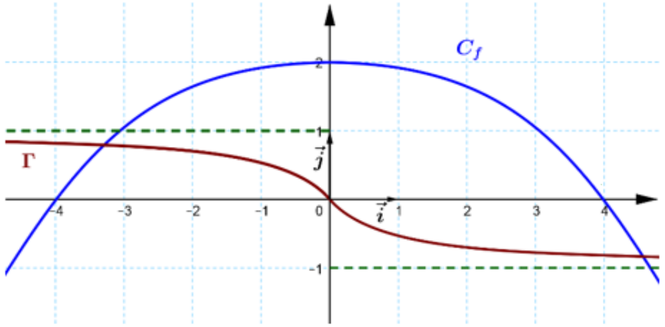
Mathématiques

Théme : Suites réelles

Fonction et suite 2

Exercice :

1°) Dans la figure ci-contre on donne C_f la courbe d'une fonction *f* dérivable sur IR, et Γ la courbe de f' (fonction dérivée de *f*).
On a tracer sur le graphique les asymptotes à Γ
(Droites en pointillés).
Montrer que $g: x \mapsto f(x)+x$ est croissante sur $[-4,4]$



2°) Soit (u_n) la suite définie sur *IN* par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + f(u_n), \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 \le u_n \le 4$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) Déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2°) Pour tout $n \in IN$, on pose : $v_n = \sum_{k=0}^{n} f(u_k)$. Montrer que $v_n = u_{n+1} - 1$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3°) Pour tout $n \in IN$, on pose : $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + u_k$.

Montrer que pour tout $k \in IN$: $u_{k+1} + u_k \ge 2$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

1°) g est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = f'(x) + 1$

ou $-1 \le f'(x) \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f'(x) + 1 \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi $g(x)$ est croissante sur $[-4,4]$

2) a) pour $n=0$ $\quad 0 \leqslant u_0 = 1 \leqslant 4$ (Vraie)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ et

montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

On a $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 4$

et g est croissante sur $[0,4]$

$\Rightarrow \quad g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(4)$

$\Rightarrow \quad f(0)+0 \leqslant u_{n+1} \leqslant f(4)+4$

$\Rightarrow \quad 0 \leqslant 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

$\Rightarrow \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4}$

2) b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

$= f(u_n) + u_n - u_n = f(u_n) \geqslant 0$

car $u_n \in [0,4]$

D'où (u_n) est croissante

c) (u_n) est croissante et majorée par 4

donc elle est convergente.

On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$; $0 \leq l \leq 4$

et $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = f(x) + x$

où g est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en l.

Donc $g(l) = l$

$\Leftrightarrow f(l) + l = l$

$\Leftrightarrow f(l) = 0$

$\Leftrightarrow l = -4$ ou $l = 4$

or $l \in [0, 4]$

$\Leftrightarrow l = 4$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \sum_{k=0}^{n} f(U_k)$

$= \sum_{k=0}^{n} U_{k+1} - U_k$

$= (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \dots + (U_{n+1} - U_n)$

$= U_{n+1} - U_0$

$= \boxed{U_{n+1} - 1}$

$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{U_{n+1}}_{4} - 1 = \boxed{3}$

4°) $\forall k \in \mathbb{N}$ $U_{k+1} + U_k = g(U_k) + U_k$

or $0 \leqslant U_k \leqslant 4$

et $2 \leqslant g(U_k) \leqslant 4$

$\Rightarrow$ $2 \leqslant g(U_k) + U_k \leqslant 8$

Ainsi $\boxed{U_{k+1} + U_k \geqslant 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}}$

2) $\forall k \in \mathbb{N}$; $u_{k+1} + u_k \geq 2$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} + u_k \geq \sum_{k=0}^{n} 2$$

$$\Rightarrow w_n \geq 2(n-0+1)$$

$$\Rightarrow w_n \geq 2(n+1)$$

$$\lim_{n \to +\infty} 2(n+1) = +\infty$$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

$$\sum_{k=p}^{n} \text{cste} = \text{cste}\,(n-p+1)$$